Analysis

Zusammenfassung

Teil 2

Abiturtraining

Methoden und Grundwissen in der Analysis Teil 2

Datei Nr. 41502

Stand: 19. März 2013

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Schnelldurchgang durch die Analysis soll Methoden und Faktenwissen ins Gedächtnis zurückzurufen.

Methodenwissen ist die Grundlage zum Bearbeiten von Analysis-Aufgaben. Daher sind die gezeigten Methoden hier immer mit einem Beispiel verbunden. Leider verlaufen die Berechnungen bei den unterschiedlichen Funktionstypen immer wieder anders, weil jede Funktionsart ihre Eigenschaften hat, die man kennen und berücksichtigen muss. Daher wird immer wieder auf andere Texte verwiesen, in denen man weiteres Übungsmaterial findet.

Auf vielen Seiten werden Screenshots von CAS-Rechnern wie TI Nspire CAS und CASIO ClassPad dargestellt. Sehr viele Schulen gestatten die Lösung der Abituraufgaben mit dem Einsatz solcher Rechner. Dann beherrschen die Schüler kaum mehr die manuellen Methoden, die dennoch wichtig sind, denn diese Rechner sind nur Hilfsmittel und liefern oft Ergebnisse, die man kritisch hinterfragen muss. Außerdem kann man sie nur dann sinnvoll einsetzen, wenn man genau weiß, was man tun will bzw. soll.

Das **Problem eines solchen Textes** liegt darin, dass man an wenigen ausgewählten Beispielen die wichtigsten Methoden wiederholt. Beispielsweise bei den Extremwertaufgaben gibt es jedoch so viele unterschiedliche Beispiele, dass der Leser sich aus anderen Texten weitere Beispiele holen muss, wenn er mehr Übungen dazu durchführen möchte. Fundstellen sind angegeben.

Gliederung des Methodentrainings:

Text 41501	1	Funktionsuntersuchungen
	2	Tangenten und Normalen
	3	Funktionenscharen
Text 41502	4	Aufstellen von Funktionsgleichungen
	5	Auswertung von Schaubildern von f bzw. f ' ohne Rechnungen
	6	Extremwertaufgaben
	7	Integralrechnung – handwerklich
	8	Integralrechnung - Anwendungen

Inhalt

4 Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Eigenschaften

Aufgabe

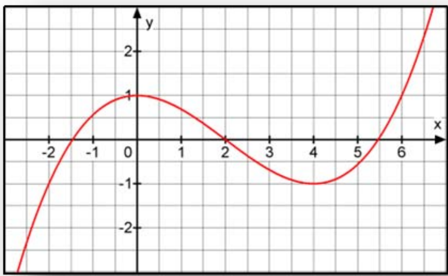
Stelle eine ganzrationale Funktion n-ten Grades auf, von der man Nullstellen, Punkte des Graphen, z. B. auch Extrempunkte, Wendepunkte oder Tangenten kennt.

Dazu benötigt man die **notwendigen Bedingungen** dieser Punkte:

Eigenschaft:		Bedingung:	Bedeutung:
f hat die Nullstelle a:		$f(a)=0$	y-Koordinate ist 0
$P_1(x_1 \mid y_1)$ liegt auf dem Graphen von f:		$f(x_1)=y_1$	
$E(x_E \mid y_E)$:ist Extrempunkt:		$f'(x_E)=0$	(waagrechte Tangente)
	und	$f(x_E)=y_E$	(Kurvenpunkt)
$W(x_W \mid y_W)$ ist Wendepunkt		$f''(x_W)=0$	(Krümmungswechsel)
	und	$f(x_W)=y_W$	(Kurvenpunkt)
$y=mx+n$ ist Tangente bei x = z		$f'(z)=m$	(Tangentensteigung)

Sechs Beispiele mit unterschiedlichen Ansätzen sollen dies verdeutlichen.
Man findet sehr viele Trainingsaufgaben in 42080 bis 42084.

Beispiel 1



Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat den Hochpunkt $H(0 \mid 1)$ und den Wendepunkt $W(2 \mid 0)$.
Stelle die Funktionsgleichung auf.

Lösung

Ansatz für die Funktion f bzw. **K**: $\boxed{y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d}$.

Da ein Wendepunkt beteiligt ist, benötigt man die 2. Ableitung dazu:

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ und $f''(x)=6ax+2b$

Auf Grund der gegebenen Fakten kennen wir 2 Punkte, werden also zwei Punktproben machen, ferner benötigen wir eine Extrempunkt- und eine Wendepunktbedingung.

Aufstellen der Funktionalgleichungen und der expliziten Gleichungen für a, b ,c und d:

Punkt-Bedingung: $H(0 \mid 1) \in$ **K** , d.h.	$f(0)=1$	$d=1$	(1)
Punkt-Bedingung: $W(2 \mid 0) \in$ **K** , d.h.	$f(2)=0$	$8a+4b+2c+d=0$	(2)
Extrempunktbedingung:	$f'(0)=0$	$c=0$	(3)
Wendepunktbedingung:	$f''(2)=0$	$12a+2b=0$	(4)

Ersetzt man d und c in (2), folgt: $8a+4b+1=0$ (5)
$12a+2b=0$ (6).

Gleichung (4) mit 2 multiplizieren und dann von (5) subtrahieren: $24a+4b=0$ (7)

(5) – (7): $-16a+1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{16}$

Eingesetzt in (4) ergibt: $b=-\frac{3}{8}$.

Ergebnis: $\boxed{f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+1}$

Lösungsmethoden mit zwei CAS-Rechnern (nur für das 1. Beispiel)

Für beide Rechner CASIO ClassPad und TI Nspire CAS gelten dieselben Methode

Zuerst definiert man f, f' und f".

Das Gleichungssystem erfordert bei CASIO nicht den solve-Befehl – im Gegensatz zu TI Nspire.

Das Ergebnis wird angezeigt.

Achtung: Die Koeffizienten sind nun noch nicht mit dem Funktionsterm von f verknüpft!

Wer also meint, ab jetzt mit f weiterrechnen zu können, täuscht sich, denn der Rechner kennt f noch nicht.

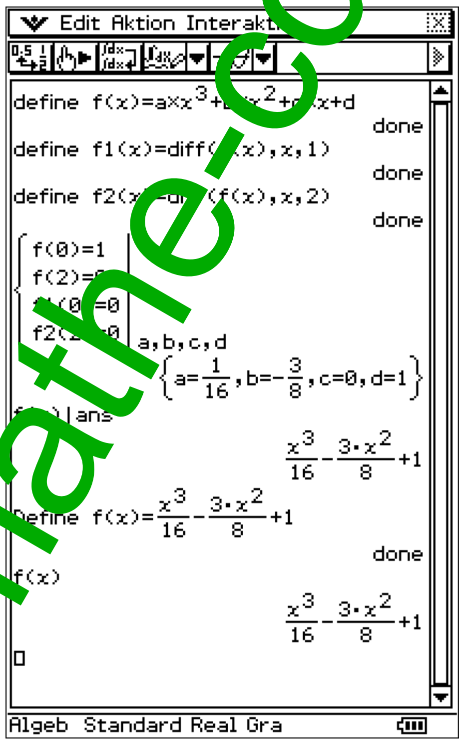
Abspeicherung des wahren Funktionsterms:
Man lässt das Ergebnis von a, b, c, d in f (x) einsetzen.
Dies erledigt der Befehl **f(x)|ans.**
Man setzt also den Bedingungsstrich | hinter f(x) und dann ***ans***, der das letzte Ergebnis einfügt.

Den dann angezeigten Funktionsterm muss man jetzt neu als f(x) definieren.

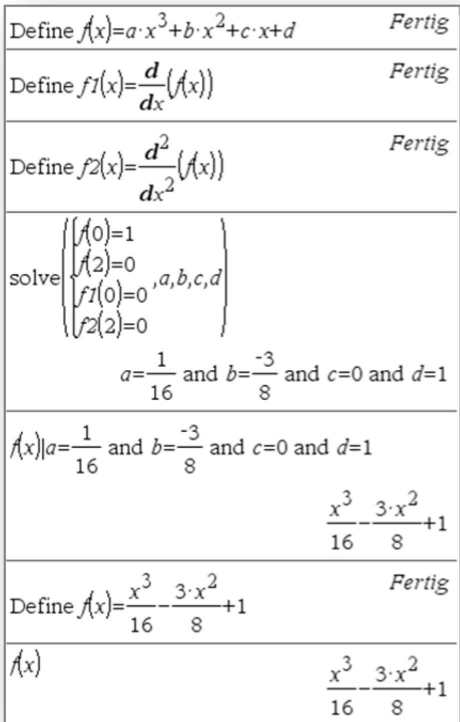
Jetzt kennt erst der Rechner die Funktion.

Dies zeigt die Kontrolleingabe f(x).

CASIO:



TI Nspire CAS:



Löse die folgenden Aufgaben selbst.
Die Musterlösungen stehen auf den Folgeseiten

Beispiel 2

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat im Punkt $N(-3|0)$ eine Tangente mit der Steigung 6. Stelle ihre Gleichung auf.

Beispiel 3

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Schaubild symmetrisch zur y-Achse ist, den Wendepunkt $W(2|2)$ und die Nullstelle $x=\sqrt{12}$ hat.

Beispiel 4

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Schaubild die x-Achse im Ursprung berührt, und bei x = 2 die Tangente $y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ hat. An der Stelle x = 4 hat das Schaubild die Steigung $\frac{28}{3}$.

Beispiel 2

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat im Punkt $N(-3\,|\,0)$ eine Tangente mit der Steigung 6. Stelle ihre Gleichung auf.

Anleitung:

Für eine ganzrationale Funktion 3. Grades macht man den Ansatz: $\boxed{y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$.

Wenn das Schaubild Punktsymmetrie zum Ursprung aufweist, dann gilt $f(-x) = -f(x)$.
Und das kann nur dann der Fall sein, wenn der Funktionsterm nur ungerade Exponenten aufweist.
Das Absolutglied d gehört zu x^0 und muss daher auch 0 sein.

Ansatz bei Punktsymmetrie zum Ursprung: $\boxed{y = f(x) = ax^3 + bx}$

Lösung: Man benötigt noch $f'(x) = 3ax^2 + b$

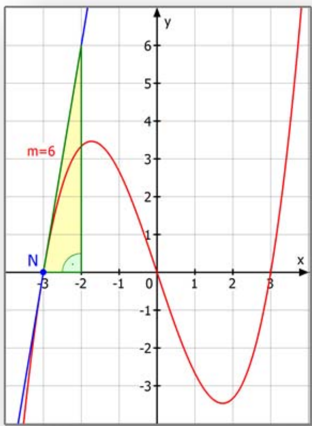
Aufstellen der Funktionalgleichungen und der expliziten Gleichungen für a und b:

Punkt-Bedingung: $N(-3\,|\,0) \in \mathbf{K}$,	d.h.	$f(-3) = 0$	$-27a - 3b = 0$	(1)
Tangenten-Bedingung: $m_{T,O} = 6$	d.h.	$f'(-3) = 6$	$27a + b = 6$	(2)

(2) + (1): $-2b = 6 \;\Rightarrow\; b = -3$

b in (2): $27a - 3 = 6 \;\Rightarrow\; 27a = 9 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{3}$

Ergebnis: $\boxed{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x}$



Beispiel 3

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Schaubild symmetrisch zur y-Achse ist, den Wendepunkt $W(2\,|\,2)$ und die Nullstelle $x=\sqrt{12}$ hat.

Anleitung:

Für eine ganzrationale Funktion 4. Grades gilt der Ansatz: $\boxed{y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}$.

Wenn das Schaubild Symmetrie zur y-Achse aufweist, dann gilt $f(-x)=f(x)$.
Und das kann nur dann der Fall sein, wenn der Funktionsterm nur geraden Exponenten aufweist.

Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $\boxed{y=f(x)=ax^4+bx^2+c}$

Lösung: Man benötigt noch $f'(x)=4ax^3+2bx$ und $f''(x)=12ax^2+2b$.

Aufstellen der Funktionalgleichungen und der expliziten Gleichungen für a, b und c:

Punkt-Bedingung: $(2\,|\,2)\in K$, d. h.	$f(2)=2$	$16a+4b+c=2$	(1)
Wendepunktbedingung: W bei x) 2:	$f''(2)=0$	$48a+2b=0$	(3)
Punkt-Bedingung: $N(\sqrt{12}\,|\,0)\in K$. d. h.	$f(\sqrt{12})=0$	$144a+12b+c=0$	(2)

Hilfe: $\sqrt{12}^2=12$ und $\sqrt{12}^4=12^2=144$.

Daher gilt: $f(\sqrt{12})=a\cdot\sqrt{12}^4+b\cdot\sqrt{12}^2+c=144a+12b+c$

Manuelle Lösung:

Elimination von c: (5) – (4): $128a+8b=-2 \quad |:4$

$32a+2b=-\frac{1}{2}$ (7)

Elimination von b: (6) – (7): $16a=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{32}}$

a in (6): $2b=-48a=-48\cdot\frac{1}{32}=-\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{b=-\frac{3}{4}}$

a und b in (4): $c=2-16a-4b=2-16\cdot\frac{1}{32}-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=2-\frac{1}{2}+3=\boxed{\frac{9}{2}}$

Ergebnis: $\boxed{f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}}$

CAS Lösung (Casio ClassPad):

```
define f(x)=a×x^4+b×x^2+c
                                   done
define f1(x)=diff(f(x))
                                   done
define f2(x)=diff(f(x),x,2)
                                   done
{f(2)=2
{f(√12)=0
{f2(2)=0     |a,b,c
                 {a=1/32, b=-3/4, c=9/2}
f(x)|ans
                 x^4/32 - 3·x^2/4 + 9/2
```